

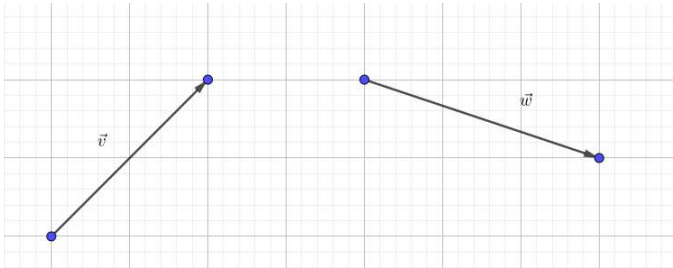
Produit scalaire de deux vecteurs

page 1	Représentation en dessin
page 2	Définition et formule géométrique
page 3	Formule cartésienne
page 4	Application du produit scalaire: Mesurer le travail
page 5	Application du produit scalaire: Déterminer la mesure de l'angle entre deux vecteurs
page 6	Problème concernant l'angle entre deux vecteurs
	Exercices 32 à 40

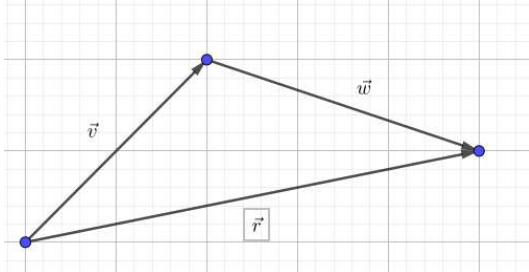
Représentation en dessin

Pour représenter le produit scalaire de deux vecteurs, il est important de savoir (de peur de confondre) comment représenter l'addition et la soustraction.

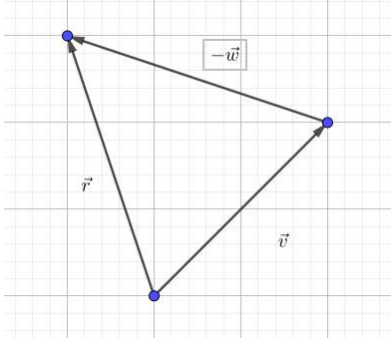
Pour ce faire, utilisons les deux vecteurs suivants:



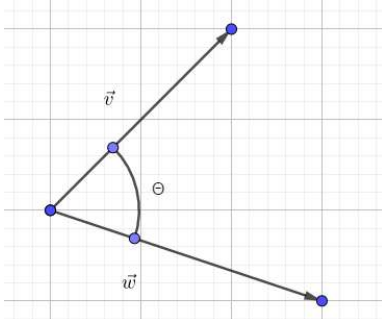
Pour additionner deux vecteurs, il faut dessiner les vecteurs bout à bout.



Pour soustraire deux vecteurs, on doit dessiner le premier vecteur pour ensuite dessiner l'opposé du second (le second mais de sens contraire).



Pour multiplier deux vecteurs il faut les dessiner en utilisant le même point de départ.



Toutefois... ceci n'est que le dessin de l'opération... Il nous est pas possible de dessiner le résultat! Le résultat d'un produit scalaire n'est pas l'angle formé par les deux vecteurs, ni la mesure du segment qui ferme le triangle...

Définition du produit scalaire

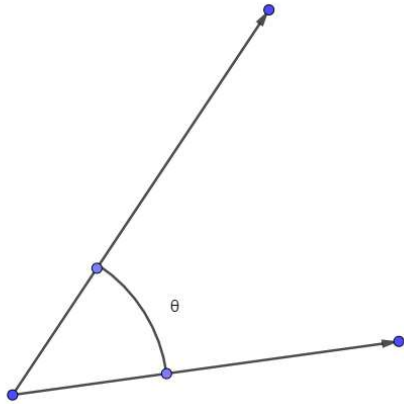
Le produit scalaire de deux vecteurs correspond au produit de la longueur orientée de la projection orientée de la projection orthogonale du premier sur le deuxième par la norme du deuxième.

De cette définition on peut en déduire la formule suivante...

$$\vec{v} \cdot \vec{w} : \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$$

dans lequel θ est la mesure de l'angle entre les deux vecteurs.

Important! Pour qu'un angle soit considéré comme étant un angle entre deux vecteurs, l'angle doit être positionné entre deux vecteurs qui partagent un même point de départ!



Exemple

Soit $\vec{v} : \|\vec{v}\| = 40$ et $\theta = 60^\circ$ et $\vec{w} : \|\vec{w}\| = 38$ et $\theta = 100^\circ$

Détermine la valeur du produit scalaire de ces deux vecteurs.

La mesure de l'angle entre ces deux vecteurs est donc de $100 - 60 = 40^\circ$

En appliquant la formule...

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta = 40 \cdot 38 \cdot \cos 40 = 1520 \cdot 0,7660 = 1164,3876$$

Deuxième exemple

Soit $\vec{v} : \|\vec{v}\| = 50$ et $\theta = 150^\circ$ et $\vec{w} : \|\vec{w}\| = 62$ et $\theta = 24^\circ$

Détermine la valeur du produit scalaire de ces deux vecteurs.

La mesure de l'angle entre ces deux vecteurs est donc de $150 - 24 = 126^\circ$

En appliquant la formule...

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta = 50 \cdot 62 \cdot \cos 126 = 3100 \cdot (-0,5878) = -1822,1343$$

Attention!

La valeur d'un produit scalaire n'est ni une norme, ni une aire, ni un angle...

Produit scalaire par la forme cartésienne (composantes)

Soit $\vec{v}(a;b)$ et $\vec{w}(c;d)$. Le produit scalaire de ces vecteurs correspond à ...

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a \cdot c + b \cdot d$$

Exemple

Soit $\vec{v}(-5;8)$ et $\vec{w}(10;3)$. Détermine la valeur du produit scalaire de ces deux vecteurs.

Calculs...

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -5 \cdot 10 + 8 \cdot 3 = -50 + 24 = -26$$

Application du produit scalaire: Mesurer le travail

En physique, la notion de travail représente une force déployée sur une certaine distance.

Toujours en physique, la formule du travail est...

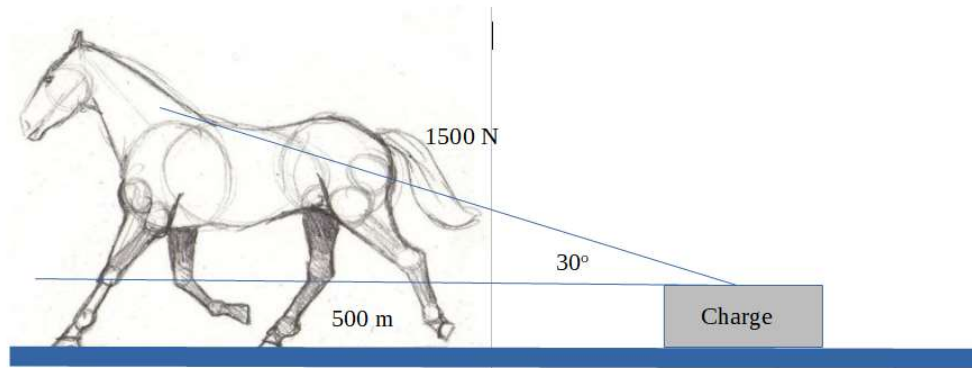
Travail (en Joules)= Force (en Newton) parallèle multiplié par la distance (en mètres)

Cette notion de force parallèle s'apparente à une projection orthogonale tel que décrit en page 1 dans la définition du produit scalaire de deux vecteurs.

Ainsi, nous pourrions utiliser la formule du produit scalaire de deux vecteurs pour mesurer un travail.

Exemple

Un cheval doit tirer une charge sur distance de 500 m. Ce cheval déploie une force de 1500 N (Newton) avec un angle de 30°.



Non... Je n'ai pas fait ce dessin...

Détermine la valeur du travail déployer par ce cheval.

Calculs...

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta \\ &= 1000 \text{ N} \cdot 500 \text{ m} \cdot \cos 30^\circ \\ &= 500\,000 \cdot 0,8660 \\ &= 433\,012,7019 \text{ Joules ou } 433 \text{ kJ}\end{aligned}$$

Application du produit scalaire: Déterminer la mesure de l'angle entre deux vecteurs.

Forme géométrique

La mesure de l'angle entre deux vecteurs écrit sous la forme géométrique est égale à la différence entre les mesures des angles (orientation) de ces deux vecteurs.

Exemple

Soit $\vec{v} : \|\vec{v}\| = 64$ et $\theta = 141^\circ$ et $\vec{w} : \|\vec{w}\| = 38$ et $\theta = 68^\circ$. Détermine la mesure de l'angle formé par ces vecteurs.

La mesure de l'angle entre ces deux vecteurs est donc de $141 - 68 = 73^\circ$.

Forme cartésienne (composantes)

Pour trouver la mesure de l'angle entre deux vecteurs sous la forme cartésienne, nous pourrions traduire chacune de nos formes cartésiennes en formes géométriques pour ensuite soustraire les orientations ou... on pourrait utiliser les deux formules de produit scalaire!

Exemple

Soit $\vec{v}(20; 4)$ et $\vec{w}(10; 12)$. Détermine la mesure de l'angle entre ces deux vecteurs.

Nous cherchons donc θ dans $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$

Première étape: calculons la partie de gauche de $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 20 \cdot 10 + 4 \cdot 12 = 200 + 48 = 248$$

Ainsi... $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$ devient $248 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$

Deuxième étape: calculons les normes des vecteurs.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{20^2 + 4^2} = \sqrt{400 + 16} = \sqrt{416} = 20,3961$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244} = 15,6205$$

Ainsi $248 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \theta$ devient $248 = 20,3961 \cdot 15,6205 \cdot \cos \theta \rightarrow 248 = 318,5973 \cdot \cos \theta$

Troisième étape: isolons θ

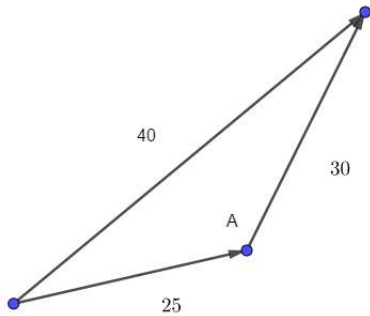
$$248 = 318,5973 \cdot \cos \theta \rightarrow 0,7784 = \cos \theta \rightarrow \cos^{-1} 0,7784 = 38,8845^\circ$$

Problème concernant l'angle entre deux vecteurs

Deux forces appliquées sur un même objet, l'une de 25 N et l'autre de 30 N, ont une résultante de 40 N. Quelle est la mesure de l'angle entre ces deux forces initiales?

Démarche

Étape 1 Illustrons la situation...



Étape 2 Calculons la mesure de l'angle A

Le triangle n'étant pas rectangle et ne connaissant pas d'angle, nous allons utiliser la loi des cosinus. Plutôt que la loi des cosinus, nous aurions pu utiliser la loi de Héron...

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$\rightarrow 40^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos A$$

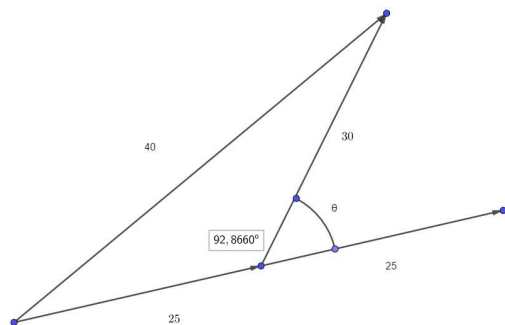
$$\rightarrow 1600 = 625 + 900 - 1500 \cdot \cos A$$

$$\rightarrow 1600 = 1525 - 1500 \cdot \cos A$$

$$\rightarrow 75 = -1500 \cdot \cos A$$

$$\rightarrow \cos A = -0,05 \rightarrow \cos^{-1} -0,05 = A \rightarrow A = 92,8660^\circ$$

Étape 3 Calculons la mesure de l'angle entre les deux vecteurs



En prolongeant le vecteur mesurant 25, l'angle de $92,8660^\circ$ et θ sont des angles supplémentaires. Donc... $\theta = 180 - 92,8660 = 87,137^\circ$.