Nom : ______________________

Mathématique 5TS et 5SN

Cahier d'exercices
Optimisation et fonctions réelles

Optimisation	1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐
Valeur absolue	7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 18 ☐ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☐
Rationnelle	22 ☐ 23 ☐ 24 ☐ 25 ☐ 26 ☐ 27 ☐ 28 ☐ 29 ☐ 30 ☐ 31 ☐ 32 ☐ 33 ☐
Racine carrée	34 ☐ 35 ☐ 36 ☐ 37 ☐ 38 ☐ 39 ☐ 40 ☐ 41 ☐ 42 ☐ 43 ☐ 44 ☐
Composé	45 ☐ 46 ☐ 47 ☐ 48 ☐ 49 ☐ 50 ☐

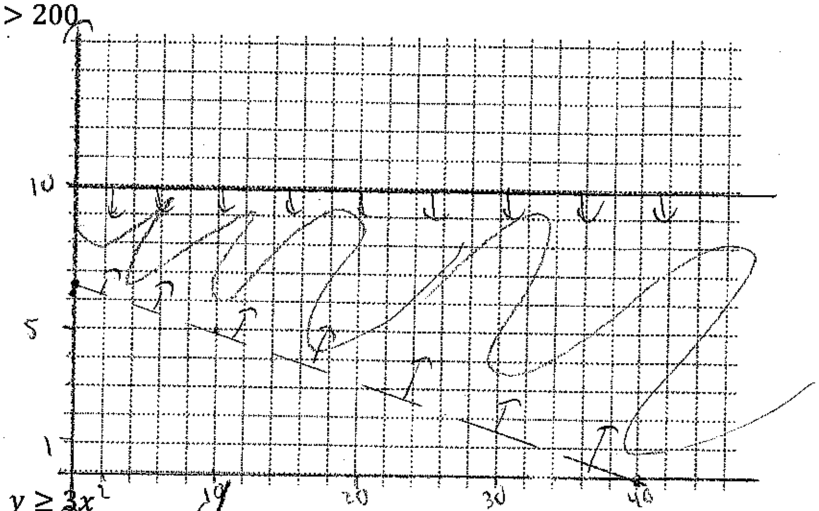
Tu dois avoir réussi 80% de ce document pour avoir accès à l'examen.
Date de l'examen : ______________

Patrick Dussault, Eulalie-Durocher Printemps 2018

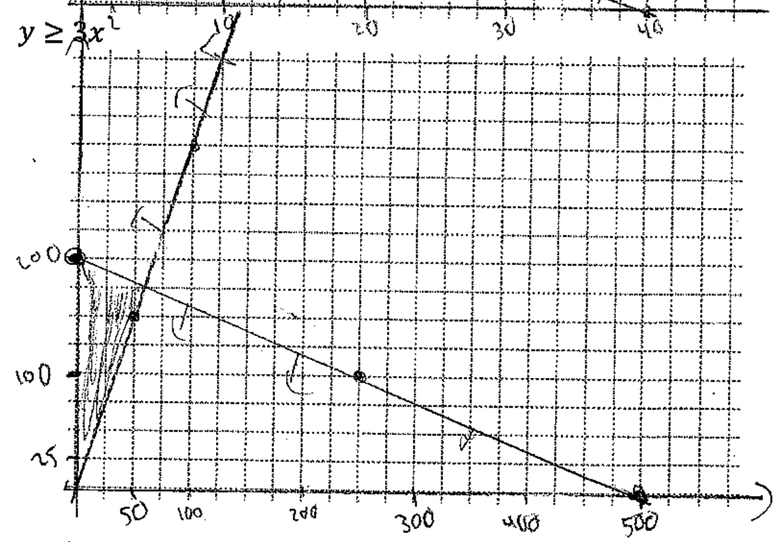
Optimisation : résolution de systèmes d'inéquations

1. Résous les systèmes d'inéquations suivants.

a) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y \leq 10 \quad et \quad 5x + 30y > 200$



b) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 4x + 10y \leq 2000 \quad et \quad y \geq 3x^2$



2. Soit les contraintes suivantes :

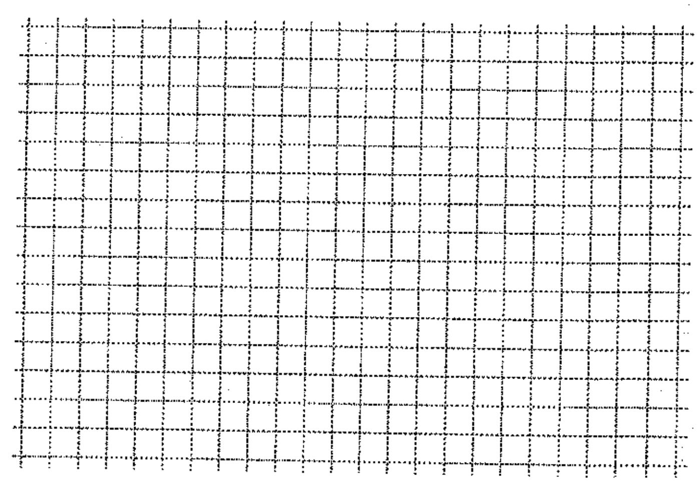
$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad y \geq 50 \quad y \leq 2x \quad 5x + 4y \leq 1300$$

Détermine les coordonnées du couple qui maximise la fonction z = 20x + 12y ainsi que la valeur de cette fonction à ce point.

(220, 50)

et

5000



Optimisation : situation en texte

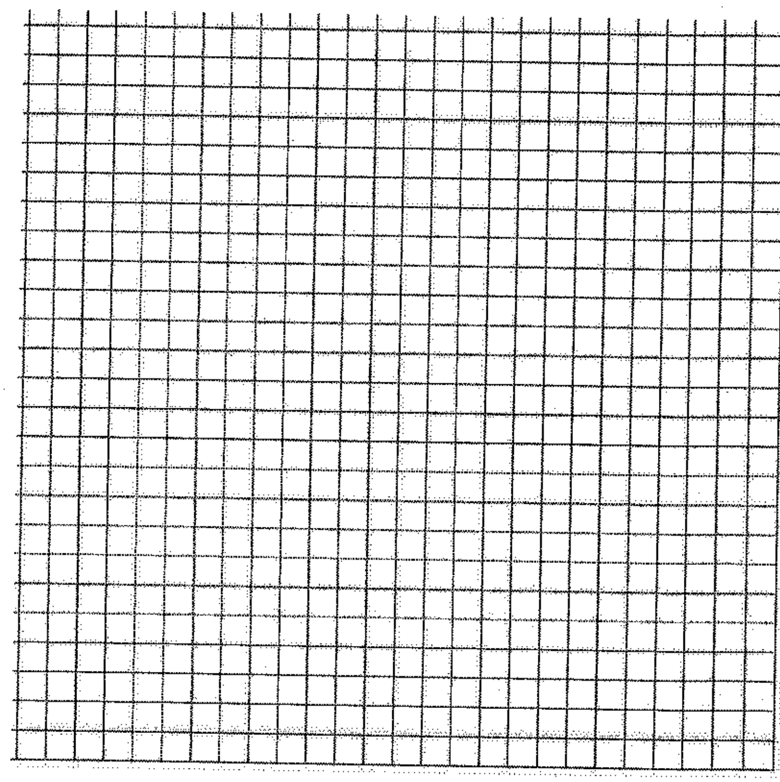
3. Pour faire des biscuits, Camille a besoin de 4 ingrédients : farine, beurre, cacahuètes et chocolat. Elle regarde dans son garde-manger et y trouve 500 g de farine, 450 g de cacahuètes et 500 g de chocolat. Dans son réfrigérateur, elle constate qu'elle a 250 g de beurre.

Pour sa recette de biscuits au chocolat, il lui faut 10 g de farine, 10 g de beurre et 25 g de chocolat pour chaque biscuit.

Pour sa recette de biscuits aux cacahuètes, chaque biscuit nécessite 15 g de farine, 5 g de beurre et 15 g de cacahuètes.

Elle vend ses biscuits aux chocolat 60¢ et ceux aux cacahuètes 40¢.

Quelle quantité de chaque sorte de biscuits doit-elle préparer pour maximiser ses profits ?



12 biscuits au chocolat
et
25 biscuits aux cacahuètes

Optimisation : situation en texte

4. Julie a deux emplois d'été : l'un comme réceptionniste et l'autre comme caissière. En tant que réceptionniste, elle doit travailler au moins 6 heures par semaine pour un salaire de 12$ l'heure. Son emploi de caissière est payé 11,25$ l'heure. Elle y consacre au moins deux fois plus d'heures qu'à son travail de réceptionniste.

Cependant son employeur ne peut lui garantir plus de 22 heures par semaine comme caissière. Au cours d'une semaine, Julie ne peut travailler plus de 30 heures.

Combien d'heures Julie devra-t-elle consacrer à chacun de ses emplois afin de maximiser ses revenus?

10 heures comme réceptionniste
et
20 heures comme caissière

<u>Optimisation : situation en texte</u>

5. André doit surveiller l'alimentation de son vieux chat. Il doit s'assurer qu'il consomme un minimum de 18 grammes de lipide et 12 grammes de protéine par semaine.

Le produit RonRon contient 3g de lipide et 4 g de protéine par boîte de 100 g. Le produit Minou-Minou contient, quant à lui, 2g de lipide et 1g de protéine par boîte de 100 g.

Sachant que le produit RonRon coûte 3,50$ par boîte de 100 grammes et que le produit Minou-Minou coûte 3,25$ pour la même quantité, combien de boîtes de 100 grammes de chaque produit devrait-on acheter pour minimiser le coût d'achat tout en comblant les besoins nutritifs de l'animal?

6 boîtes de RonRon

Optimisation : situation en texte

6. Avec les tomates de son potager et selon une vieille recette de sa grand-mère, Marc prépare une sauce à spaghetti qu'il vend à un petit épicier. Il verse sa sauce dans des contenants de deux formats : 1 litre et 3 litres. Il produit au moins 60 litres de sauce à chaque mois. L'épicier ne peut lui acheter plus de 60 contenants par mois et désire avoir au moins 10 contenants de 1 litre de plus que de contenants de 3 litres.

Son profit est de 3,75$ pour chaque contenant de 1 litre et de 8,75$ pour chaque contenant de 3 litres. Combien de contenants de chaque sorte Gino devrait-il utiliser afin de maximiser son profit?

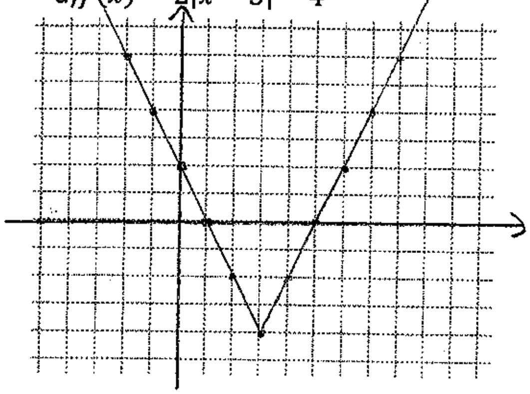
Quel sera son profit maximal?

35 contenants de 1 litre
et
25 contenants de 3 litres

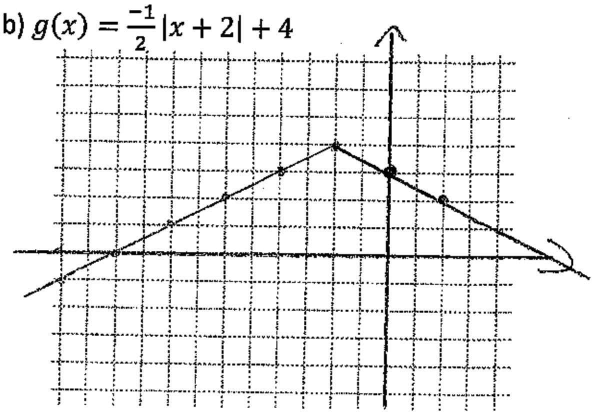
Fonction valeur absolue : représentation graphique et rôle des paramètres

7. Représente graphiquement les fonctions valeur absolue suivantes.

a) $f(x) = 2|x-3| - 4$



b) $g(x) = \frac{-1}{2}|x+2| + 4$



8. Pour chacune des fonctions valeur absolue ci-dessous, détermine la pente de chacune des demi-droites ainsi que les coordonnées du sommet.

a) $f(x) = -3|4x + 20| - 6$

S (−5 ; −6)

Pentes 12 et −12

b) $g(x) = \frac{2}{3}\left|-x - \frac{4}{7}\right| + \frac{1}{11}$

S $\left(\frac{-4}{7} ; \frac{1}{11}\right)$

Pentes $\frac{2}{3}$ et $\frac{-2}{3}$

c) $h(x) = \frac{5}{6}\left|\frac{2}{3}x - 6\right| + 9$

S (9 ; 9)

Pentes $\frac{5}{9}$ et $\frac{-5}{9}$

d) $i(x) = -4|10 - 2x| + 35$

S (5 ; 35)

Pentes 8 et −8

Fonction valeur absolue : valeurs associées

9. Soit les fonctions valeur absolue suivantes :

$$f(x) = 12|x-6|+9$$
$$g(x) = -2|x+8|+20$$

Détermine l'image des nombres suivants.

a) f(10) = 57

b) f(-2) = 105

c) g(0) = 4

d) g(-20) = -4

10. Pour chacune des fonctions suivantes, trouve les valeurs du domaine associées.

a) Soit $f(x) = 5|x-8| + 10$. Trouve x si f(x)=30.

4 et 12

b) Soit $f(x) = -2|x+9| + 12$. Trouve x si f(x)=-9.

-19,5 et 1,5

c) Soit $f(x) = 3|x-8| + 21$. Trouve x si f(x)=39.

2 et 14

Fonction valeur absolue : analyse

11. Pour chacune des fonctions suivantes, détermine les intervalles de croissance et de décroissance.

a) $f(x) = 2|x - 6| + 10$

Croiss.
$x \in [6, \infty$

Décroiss.
$x \in -\infty ; 6]$

b) $g(x) = \frac{-3}{5}\left|\frac{1}{2}x - 10\right| + 5$

Croiss.
$x \in -\infty ; 20]$

Décroiss.
$x \in [20, \infty$

12. Détermine les signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3|x - 2| - 12$

Positif
$x \in -\infty ; -2] \cup [6, \infty$

Négatif
$x \in [-2 ; 6]$

b) $g(x) = -4|x + 12| + 20$

Positif
$x \in [-17 ; -7]$

Négatif
$x \in -\infty ; -17] \cup [-7, \infty$

13. Détermine l'équation d'une fonction valeur absolue positive pour $x \in -\infty; \frac{-1}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \infty$ et dont l'ordonnée à l'origine est -2.

$F(x) = 4|x - 1| - 6$

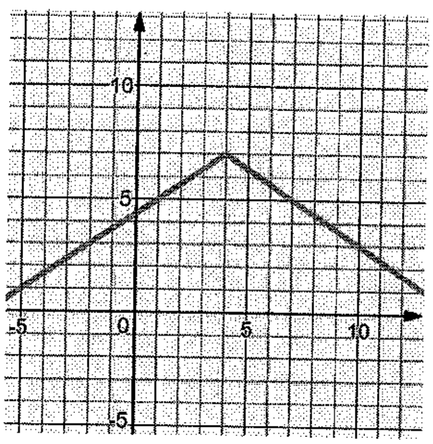
Fonction valeur absolue : recherche d'équation

14. Détermine l'équation de la fonction valeur absolue associée à la table de valeurs suivante.

x	y
9	-5
10	-2
11	1
12	4
13	1
14	-2

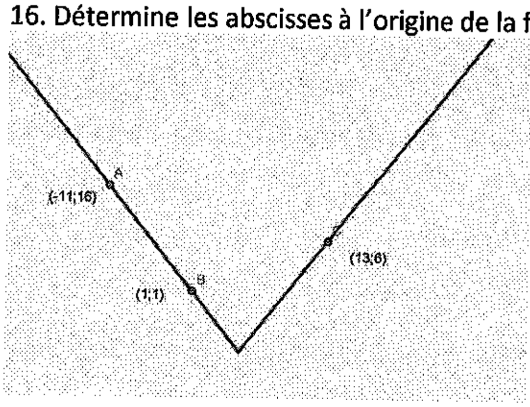
$f(x) = -3|x-12|+4$

15. Retrouve l'équation de la fonction valeur absolue associée au graphique suivant :



$f(x) = -\frac{2}{3}|x-4|+7$

16. Détermine les abscisses à l'origine de la fonction valeur absolue suivante.



(1,8 ; 0)

et

(8,2 ; 0)

Fonction valeur absolue : inéquations et système

17. Pour chacune des fonctions suivantes, trouve les valeurs du domaine associées.

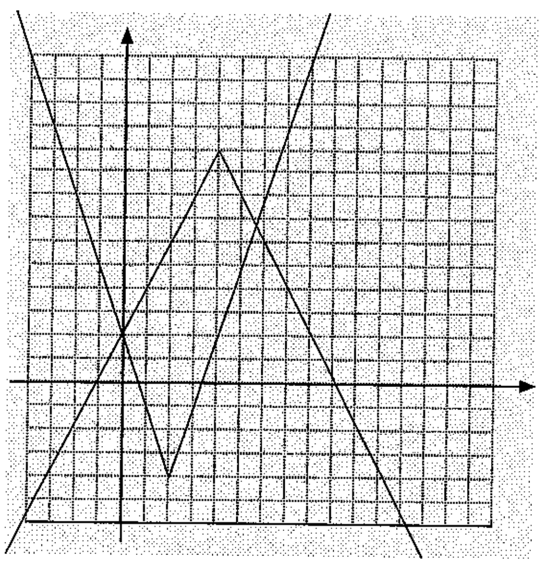
a) Soit $f(x)=12|x+3|-2$. Trouve x si f(x)<34.

$x \in]-6,0[$

b) Soit $g(x)=-5|x+2|+4$. Trouve x si g(x)≤-12.

$x \in -\infty ; -5{,}2] \cup [1{,}2 ; \infty$

18. Soit les deux fonctions valeurs absolues illustrées ci-dessous :



Ces deux fonctions ont le couple (0,2) comme premier point d'intersection.
Détermine les coordonnées du deuxième point d'intersection.

$(5{,}6 ; 6{,}8)$

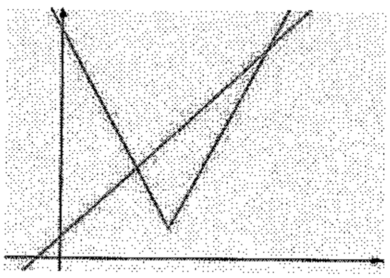
Fonction valeur absolue : système semi-linéaire

19. Détermine les coordonnées des points d'intersections des fonctions suivantes.

$$f(x)=2|x-5|+8 \text{ et } g(x)=\frac{1}{2}x+13$$

(10 , 18) et (2 , 14)

20. Les deux sentiers pédestres d'un parc-nature sont représentés dans le graphique suivant :



Les sentiers débutant et expert sont traduits, respectivement, par les équations suivantes :

$$f(x) = 4x + 8 \text{ et } g(x) = 12 + 2|4x - 40|$$

Trouve la distance entre les intersections des deux sentiers ?

49,4773

Fonction valeur absolue : résolution de problème

21. Dans une station de ski alpin, on a enregistré la température extérieure à chaque heure entre minuit et 20 heures. Pendant cette période, on a constaté que la variation de la température (en degrés Celsius) selon le temps écoulé depuis minuit (en heures) correspondait à une fonction valeur absolue.

Ainsi, la température au début de l'observation (minuit) était de 1°C. Dix heures plus tard, la température atteignait son minimum de -4°C. Ensuite, elle a commencé à remonter pour atteindre à nouveau 1° à 20 heures.

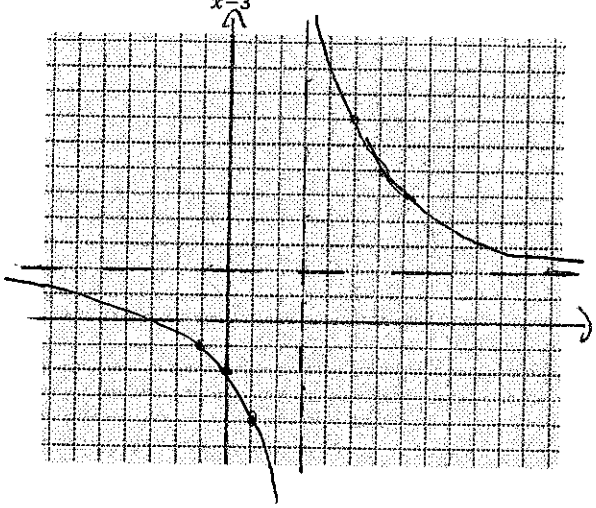
Pendant combien d'heures, au cours de cette période, la température a-t-elle été inférieure ou égale à -1°C?

Pendant 12 heures

Fonction rationnelle : représentation graphique et rôle des paramètres

22. Représente graphiquement les fonctions rationnelles suivantes. De plus, détermine les intervalles de croissance et de décroissance.

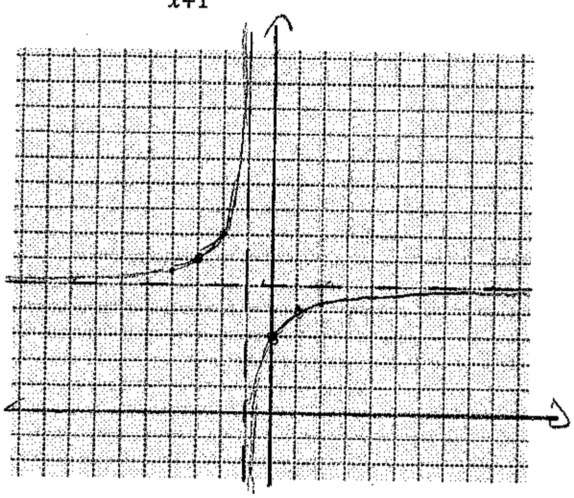
a) $f(x) = \frac{12}{x-3} + 2$



Croissance $x \in \varnothing$ (ou $\{\}$)

Décroissance
$x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
ou $x \in]-\infty ; 3[\cup]3 ; \infty$

b) $g(x) = \frac{-2}{x+1} + 5$



Croissance
$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Décroissance
$x \in \varnothing$

Fonction rationnelle : valeurs associées

23. Soit les fonctions rationnelles suivantes.

$$f(x)=\frac{15}{x-2}+6 \text{ et } g(x)=\frac{-10}{x+5}+12$$

Détermine l'image des nombres suivants :

a) f(3) = 21

b) g(-3) = 7

c) g(-5) = Impossible

d) f(-1) = 1

24. Pour chacune des fonctions suivantes, trouve les valeurs du domaine associées.

a) $f(x)=\frac{9}{x-1}+2$. Trouve x si f(x)=5

$x = 4$

b) $g(x)=\frac{-5}{x+6}+4$. Trouve x si g(x)=-20

$x = -5,79\overline{16}$

c) $h(x)=\frac{40}{x-12}+25$. Trouve x si f(x)=5

$x = 10$

Fonction rationnelle : changement de forme

25. Transforme les fonctions rationnelles suivantes en forme fractionnaire :

a) $f(x) = \frac{-20}{x+4} + 2$

b) $g(x) = \frac{12}{x-6} + 8$

$f(x) = \frac{2x-12}{x+4}$

$g(x) = \frac{8x-36}{x-6}$

26. Transforme les fonctions rationnelles suivantes en forme canonique.

a) $f(x) = \frac{10x-2}{5x+1}$

b) $g(x) = \frac{3x-6}{4x+12}$

$f(x) = \frac{-0{,}8}{x+0{,}2} + 2$

$g(x) = \frac{-3{,}75}{x+3} + 0{,}75$

27. Détermine les signes de la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{24}{x+2} - 3$$

Positif $x \in]-2, 6]$

Négatif $x \in -\infty ; -2[\cup [6, \infty$

28. Trouve les coordonnées à l'origine de la fonction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{10x-3}{2x+8}$$

Ord. à l'ori.

$y = \frac{-3}{8}$

Abs. à l'ori.

$x = \frac{3}{10}$

Fonction rationnelle : recherche d'équation

29. Détermine l'équation d'une fonction rationnelle dont le domaine est $\Re \setminus \{4\}$, l'image est $\Re \setminus \{10\}$ et l'abscisse à l'origine est 8.

$$F(x) = \frac{-40}{x-4} + 10$$

30. Détermine l'équation de la fonction rationnelle associée à la table de valeur suivante :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	-7	Imp	17	11	9	8

$$F(x) = \frac{12}{x-2} + 5$$

Fonction rationnelle : inéquations et système semi-linéaire

31. Pour chacune des fonctions suivantes, trouve les valeurs du domaine associées.

a) Soit $f(x) = \frac{100}{x-20} + 40$. Trouve x si f(x) $\geq$ 60.

$x \in]20;25]$

b) Soit $g(x) = \frac{-6}{x+2} + 8$. Trouve x si g(x) $\leq$ 10

$x \in -\infty; -5] \cup]-2; \infty$

32. Jacques est réparateur de vélos. En moyenne, chaque réparation lui rapporte 125$. Les coûts mensuels reliés à sa boutique sont de 600$. Détermine la fonction, en forme canonique, permettant d'évaluer le profit moyen par vélos en fonction du nombre de vélos réparés au cours d'un mois. De plus utilise cette fonction pour déterminer le nombre de vélos qu'il doit réparer pour réaliser un profit moyen supérieur à 100$ par vélo.

Plus de 24 vélos

33. Détermine les coordonnées des points d'intersection des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{4}{x-6} + 8 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 6.$$

(8,10) et (2,7)

Fonction racine carrée : opérations et simplification

34. Effectue les chaînes d'opérations suivantes en ayant comme souci de conserver toute leur précision.

a) $12\sqrt{45}-3\sqrt{125}$

$21\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{8}+2\sqrt{32}-\sqrt{2}$

$13\sqrt{2}$

35. Rationalise les expressions suivantes. Simplifie les radicandes et les fractions s'il y a lieu.

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{-10}{\sqrt{6}}$ $\frac{-5\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{20}{\sqrt{50}}$

$2\sqrt{2}$

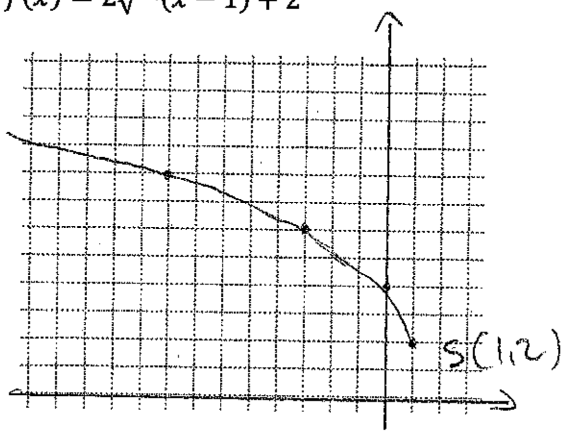
d) $\frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$\frac{-3\sqrt{2}}{2}$

Fonction racine carrée : représentation graphique et rôle des paramètres

36. Représente graphiquement les fonctions racines carrées suivantes. De plus, détermine les intervalles de croissance et de décroissance.

a) $f(x) = 2\sqrt{-(x-1)} + 2$



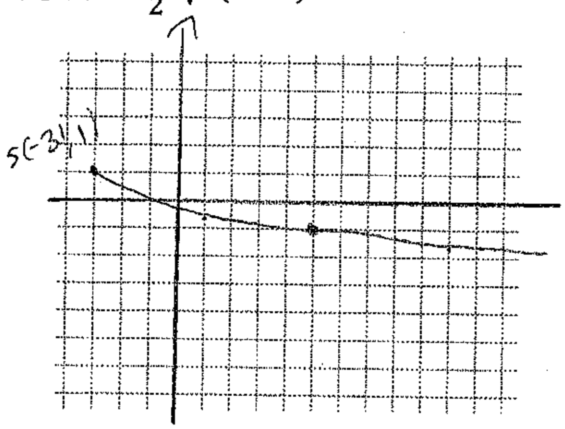
Croissance

$x \in \emptyset$

Décroissance

$x \in]-\infty ; 1]$

b) $g(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{2(x+3)} + 1$



Croissance

$x \in \emptyset$

Décroissance

$x \in [-3 ; \infty$

Fonction racine carrée : valeurs associées

37. Soit les fonctions racines carrées suivantes :

$f(x) = 5\sqrt{x+2} + 6$ $\qquad$ $g(x) = 4\sqrt{-2(x-3)}$

Détermine l'image des nombres suivants :

a) f(14)

26

b) f(18)

28,3607

c) g(-15)

24

d) g(10)

Impossible

38. Pour chacune des fonctions suivantes, trouve les valeurs du domaine associées

a) $f(x) = 5\sqrt{2(x-1)} + 12$.Trouve x si f(x)=18.

$x = 1,72$

b) $g(x) = -2\sqrt{x-3} + 3$.Trouve x si g(x)=1.

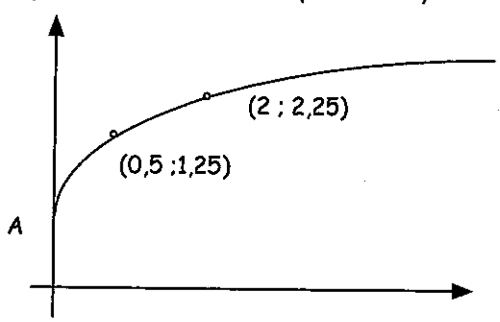
$x = 4$

Fonction racine carrée : analyse et recherche d'équation

39. Évalue f(8), sachant que le sommet de la fonction f est (20 ; 40) et que f(5) = -10.

$-4,7214$

40. Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du prix d'une action d'une jeune compagnie d'informatique depuis sa fondation au début de 2012.
Cette évolution peut être modélisée par une fonction racine carrée de sommet A (qui correspond à l'ordonnée à l'origine) où x représenté le nombre d'années écoulées depuis la création de la compagnie et y, le coût d'une action (en dollars).



Quel est le prix de l'action lors de l'ouverture de la compagnie ?

0,25 $

Fonction racine carrée : inéquations et système d'équations

41. Détermine les signes de la fonction $f(x) = -2\sqrt{5(x-4)} + 10$.

Positif $x \in [4 ; 9]$

Négatif $x \in [9 ; \infty$

42. Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouve les valeurs du domaine demandées.

a) $f(x) = -3\sqrt{x-4} + 5$

Trouve x si $f(x) > -13$.

$x \in [4 ; 40[$

b) $g(x) = -6\sqrt{-(x+1)} + 50$

Trouve x si $g(x) \leq 20$.

$x \in -\infty ; -26]$

Fonction racine carrée : système semi-linéaire

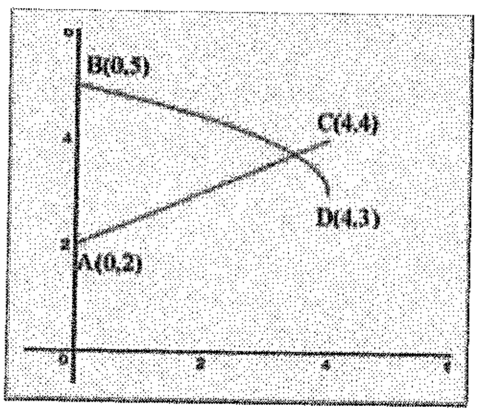
43. Résous le système semi-linéaire suivant :

$$f(x)=\frac{-5}{3}x+\frac{19}{3} \qquad g(x)=-5\sqrt{2(x-3)}+8$$

□ □

(5 ; -2) et (11 ; -12)

44. Le graphique ci-dessous illustre les trajectoires de deux fusées pyrotechniques lors d'un spectacle de feux d'artifices. Les deux fusées sont lancées au même moment à la hauteur (en mètres) correspondant aux points A et B et explosent quatre secondes plus tard à la hauteur correspondant aux points C et D.



Pendant les quatre secondes qui séparent les moments du lancement et de l'explosion, une des fusées suit une trajectoire ayant la forme de la courbe d'une racine carrée de sommet D. L'autre fusée suit une trajectoire rectiligne passant par A et C.

À quel moment les deux fusées se sont-elles trouvées à la même hauteur ?
Quelle est cette hauteur?

À 3,4641 sec les fusées sont à une hauteur de 3,7321 m

Composée de fonction : Valeurs associées

45. Soit les fonctions suivantes :

$f(x)=2x+5$

$g(x)=4|x-3|+6$

$h(x)=-2\sqrt{-4(x+1)}-8$

$i(x)=\frac{10}{x-6}+1$

Évalue les composées ci-dessous :

a)f o g(-2)

57

b) i o h (-5)

$0,5\overline{4}$

b) f o h(-10)

-35

d) g o f o i(11)

38

46. Soit les fonctions suivantes :

$f(x)=2x-5$

$g(x)=4|x-3|+6$

Pour chacun des cas ci-dessous, détermine la valeur de x.

a) f o g(x)=6

Impossible

b) g o h(x)=15,5

5,1875 ou 2,8125

Composée de fonction : retrouve équation

47. Soit les fonctions suivantes :

$$f(x)=2x-5$$
$$g(x)=\frac{4}{x-6}$$

Détermine l'équation, en forme canonique, de f o g(x)

$$h(x)=\frac{8}{x-6}-5$$

48. Soit les fonctions suivantes :

$$f(x)=5x-2$$
$$g(x)=-2|x+12|+1$$

Trouve, en forme canonique, l'équation de g o f(x)

$$h(x)=-10|x+2|+1$$

Composé de fonction : Situation en texte

49. Un groupe de touristes se trouve dans un joli pétrin! Lors d'une ballade en montgolfière, le pilote est tombé sans connaissance! Au moment de la perte de conscience du pilote, l'altitude de la montgolfière était de 500m. Ne sachant pas comment piloter la montgolfière, les touristes se retrouvent dans une montgolfière qui monte à une vitesse de 5 m par seconde.

L'équation $f(x) = 5x + 500$ permet de déterminer l'altitude (en m) selon le nombre de secondes de montée.

Plus on monte en altitude, plus la pression atmosphérique diminue. L'équation $g(x) = \frac{530000}{x+5000}$ permet d'approximer la pression atmosphérique (en KPa) en fonction de l'altitude (en m). À 40 KPa, la concentration d'oxygène est trop faible pour l'être humain.

Trouve l'équation unique, en forme canonique, permettant de déterminer la pression atmosphérique en kPa en fonction du temps de montée de la montgolfière en secondes. De plus, utilise cette nouvelle fonction pour déterminer le temps de montée pour atteindre 40 KPa.

1550 sec.

Composé de fonction : Situation en texte

50. La vitesse du son dans l'air n'est pas constante; elle varie en fonction de la température selon l'équation suivante :

$$f(x) = 331{,}30\sqrt{1 + \frac{x}{273.15}}$$

Cette fonction permet de déterminer la vitesse du son (en m/s) en fonction de la température en degré Celsius. La fonction g(x) permet de déterminer une température en degré Celsius en fonction d'une température en Fahrenheit : $g(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$

Détermine l'équation en forme canonique permettant de déterminer la vitesse du son (en m/s) en fonction d'une température en degré Fahrenheit.

$$h(x) = 331{,}30\sqrt{0{,}002034\,(x + 459{,}67)}$$

x : F

y : vitesse ($\frac{m}{s}$)

Me voir pour formes équivalentes